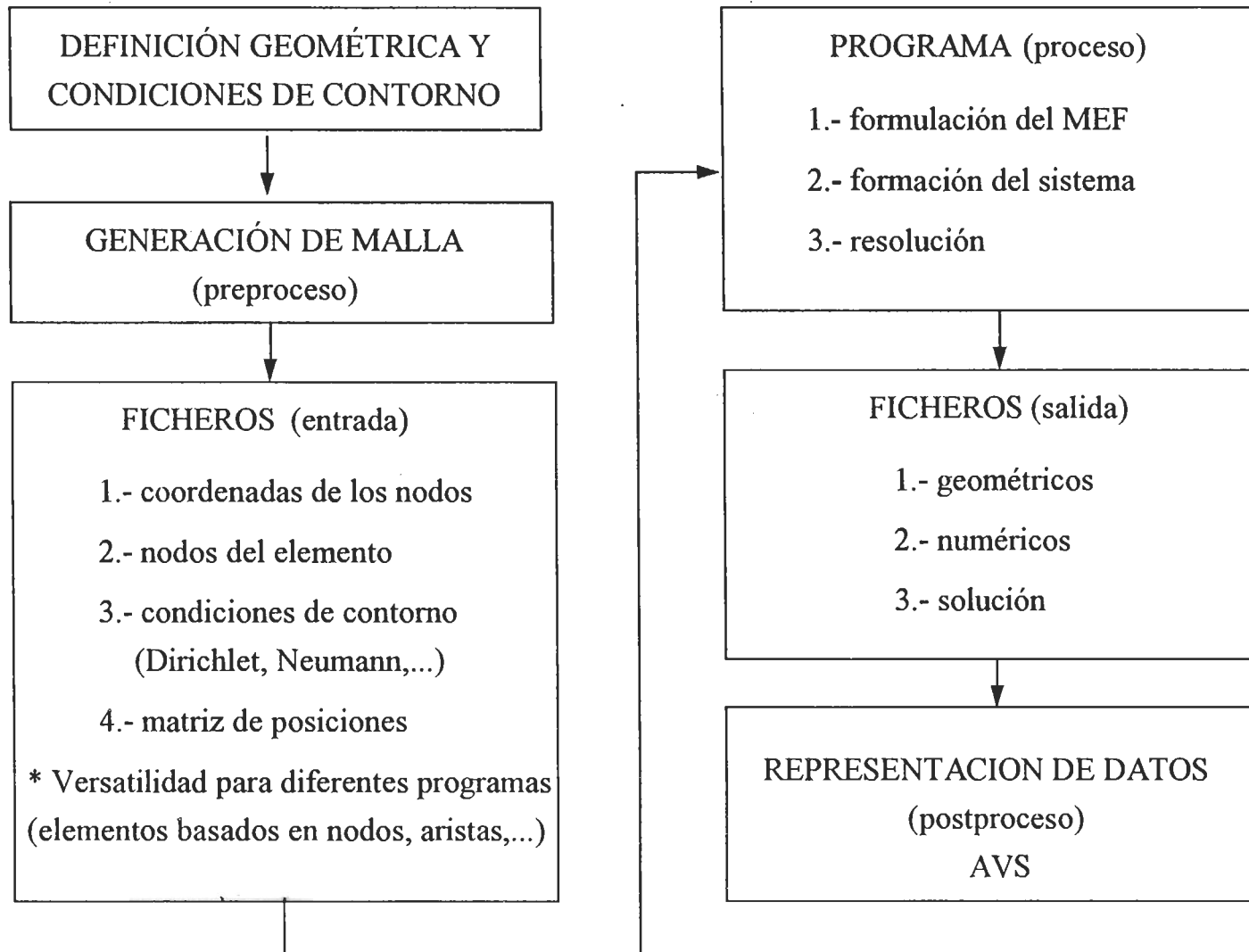


Principales etapas del código 3-D



Ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_{cond} = \vec{J}_{tot}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

\vec{E} : campo eléctrico, \vec{D} : vector inducción eléctrica, \vec{B} : campo magnético, \vec{H} : vector de inducción magnética,
 ϵ : permitividad del medio dieléctrico, μ : permeabilidad del medio, ρ : es la densidad total de carga eléctrica,

\vec{J}_{cond} : **densidad de corriente por** conducción, \vec{J}_{tot} : densidad de corriente total, tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{tot} = 0$.

Simulación numérica en electromagnetismo

Problemas electrostáticos en 3-D

□ Formulación diferencial

Resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla \cdot (\varepsilon(\vec{r}) \nabla \Phi(\vec{r})) = -\rho(\vec{r}), \text{ en } \Omega$$

sujeta a unas condiciones de contorno Dirichlet

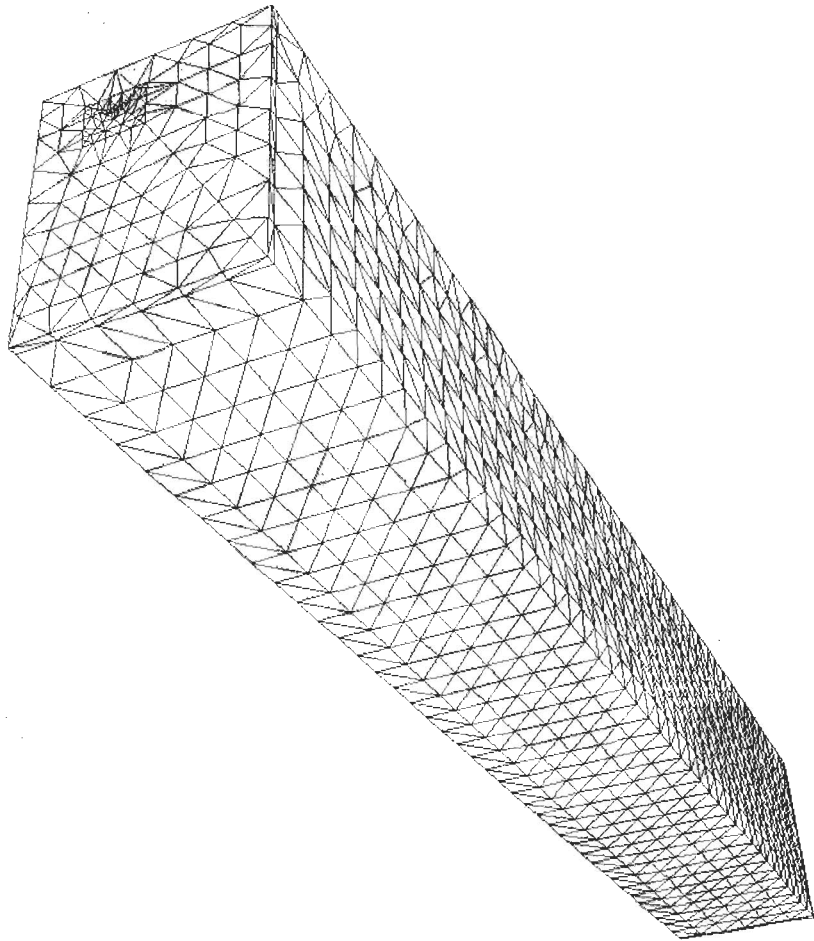
$$\Phi = p \text{ en } \partial\Omega$$

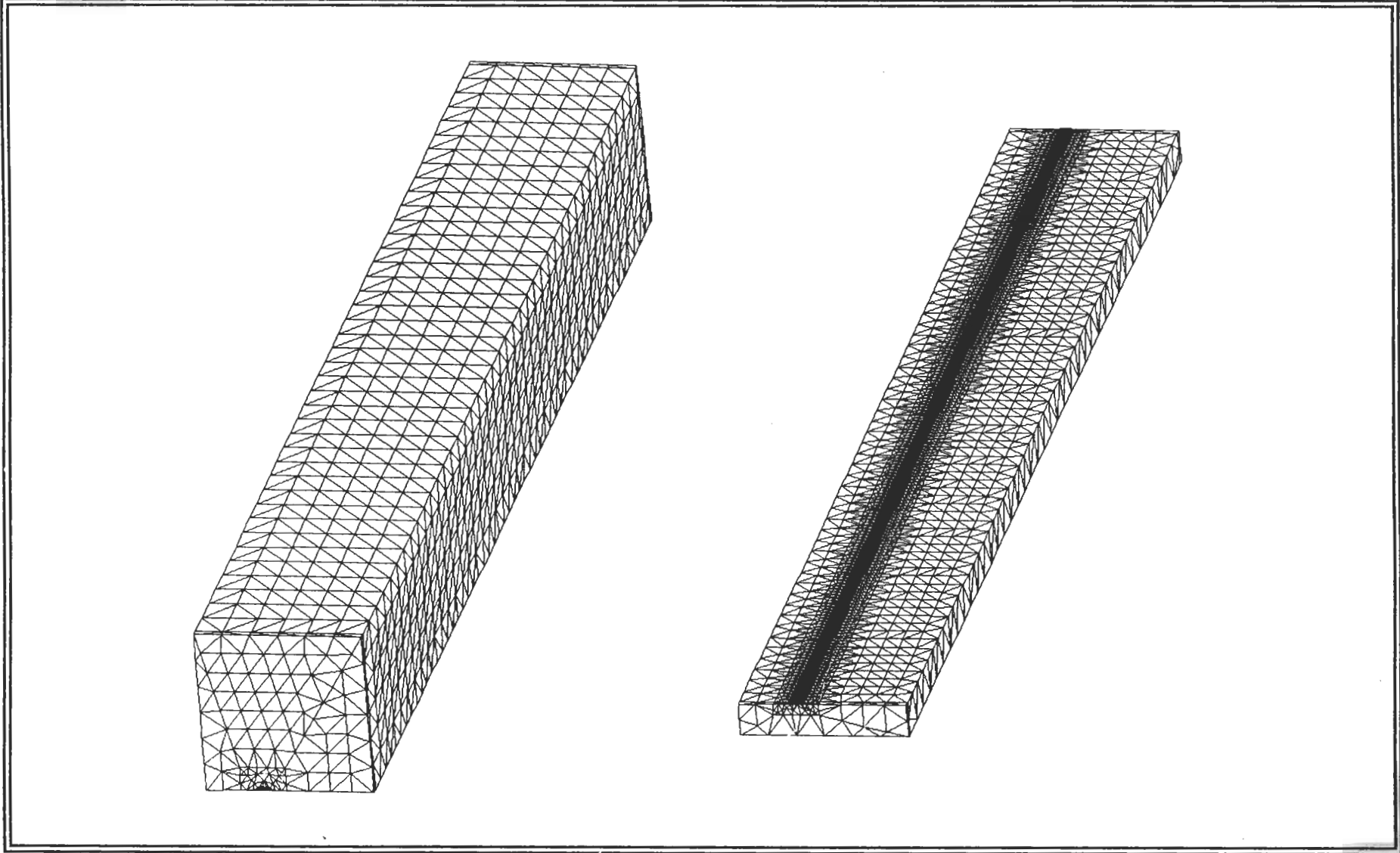
□ Formulación débil del problema

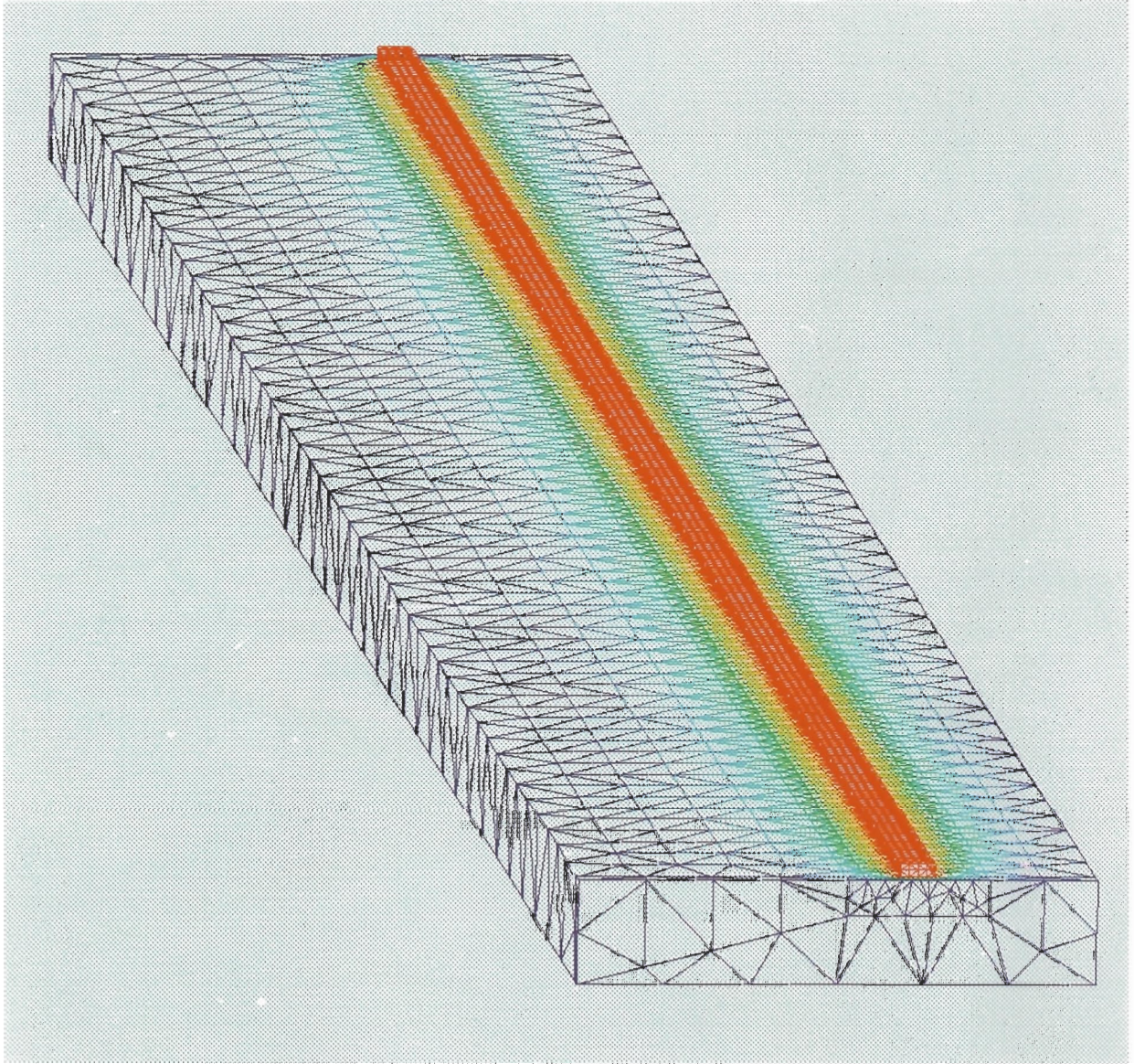
Encontrar una función Φ tal que $\Phi = p$ sobre $\partial\Omega$ y se satisfaga la ecuación

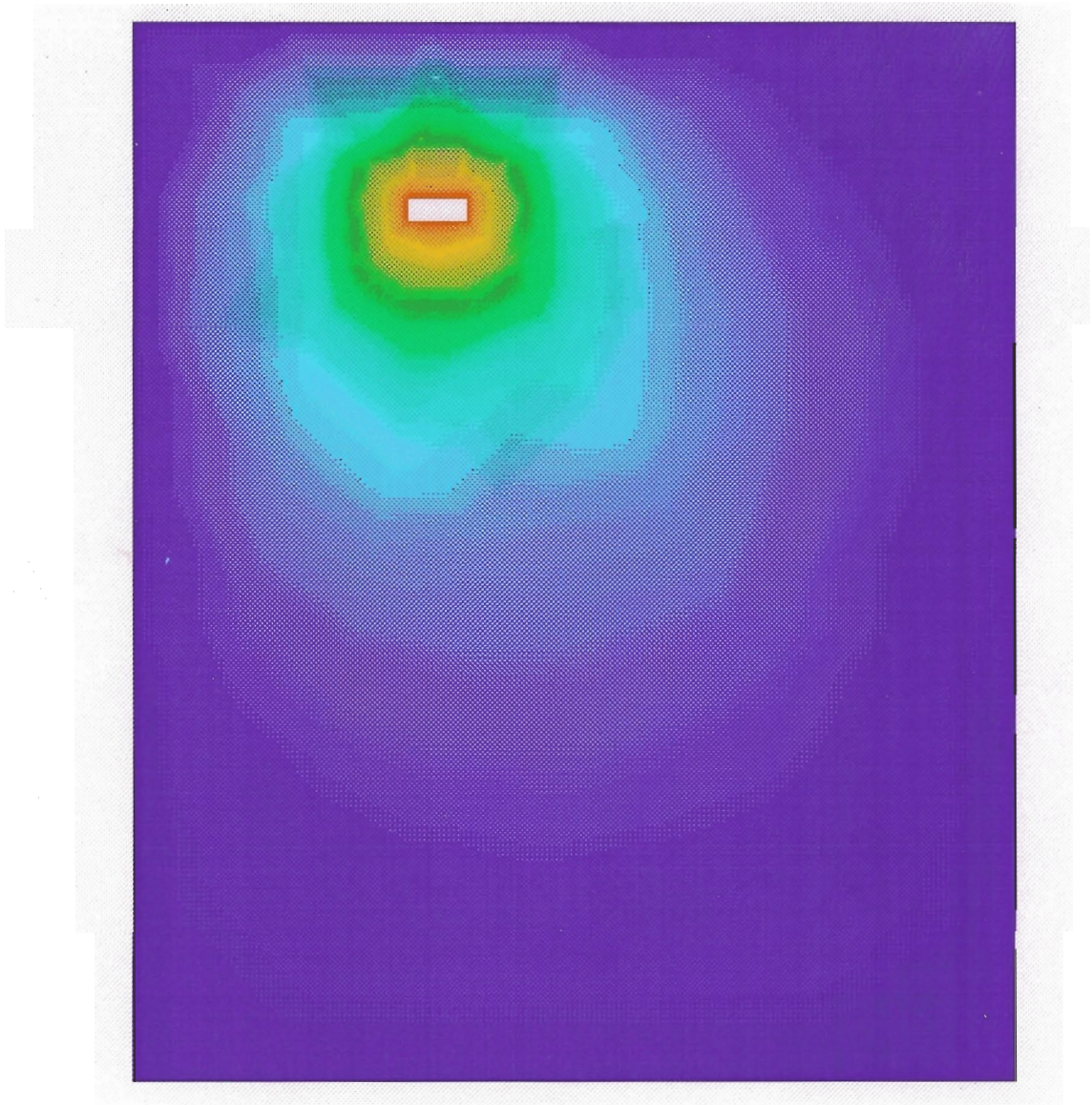
$$\int_{\Omega} \varepsilon(\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Psi) d\Omega = \int_{\Omega} \rho\Psi d\Omega$$

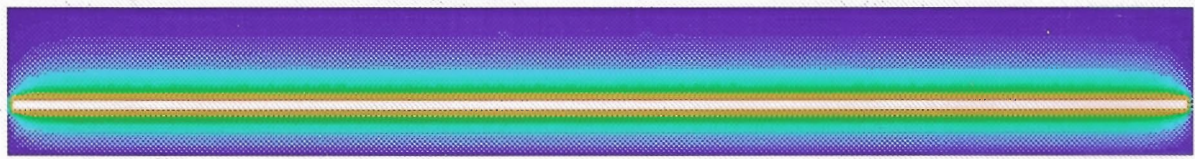
para toda función prueba admisible Ψ .











Ondas electromagnéticas guiadas

Circuitos de microondas de N puertas

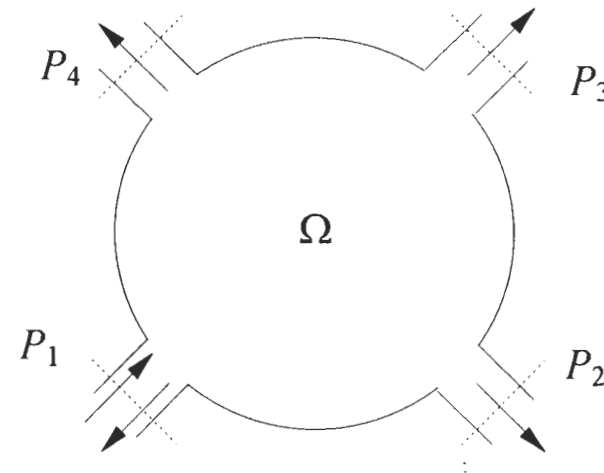
□ Formulación diferencial

Hallar el campo eléctrico \vec{E} que verifican la ecuación (en este caso $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ está prefijado)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) - \epsilon_r \mu_r k_0^2 \vec{E} = \vec{0} \quad \text{en } \Omega$$

sujeta a las condiciones de contorno:

- Conductor: $\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0}$
- Puertas: $\vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) + \gamma_i \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{U}$,
donde $\vec{U} = \vec{0}$ en P_i $i \neq 1$ y $\vec{U} = -2\gamma_1 \vec{e}_{t_1}$ en P_1 .



□ Formulación variacional

Obtener el mínimo del siguiente funcional

$$F(\vec{E}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\nabla \times \vec{E}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) - k^2 \vec{E} \cdot \vec{E}] dV + \frac{1}{2} \int_{\cup P_i} \gamma_i (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot (\vec{n} \times \vec{E}) dS - 2 \int_{P_1} \gamma_1 \vec{e}_{t_1} \cdot \vec{E} dS \quad \text{en } \Omega$$

- Las condiciones de contorno en las puertas están incluidas en la formulación.

Simulación numérica en electromagnetismo

□ Discretización

Aproximando \vec{E} mediante *edge elements*, ensamblando las matrices y vectores elementales en $[K]$ y $\{B\}$, respectivamente, e imponiendo la condición de mínimo al funcional, llegamos al sistema de ecuaciones

$$[K]\{E\} = \{B\}$$

Se imponen las condiciones Dirichlet y se resuelve. Hemos empleado el método del **Gradiente Conjugado** con diferentes **precondicionadores** para acelerar la convergencia.

Shape Functions

Shape function on a tetrahedral element Ω_e :

$$\vec{N}_i^e = \pm l_i^e (\zeta_{i_1}^e \nabla \zeta_{i_2}^e - \zeta_{i_2}^e \nabla \zeta_{i_1}^e) \quad (\text{edge element})$$

where $\zeta_{i_k}^e$ is the Lagrange shape function whose value is 1 in the k -th ($k = 1, 2$) node of i -th edge of Ω_e and l_i^e is the length of this edge.

The sign \pm assures an only direction of the edge in the mesh.

Auxiliary functions over elemental surfaces Σ_s :

$$\vec{S}_1^s = \vec{n}_s \times \vec{N}_{i_1}^e \Big|_{\Sigma_s} \quad \vec{S}_2^s = \vec{n}_s \times \vec{N}_{i_2}^e \Big|_{\Sigma_s} \quad \vec{S}_3^s = \vec{n}_s \times \vec{N}_{i_3}^e \Big|_{\Sigma_s}$$

where i_1, i_2 **and** i_3 are the edges of Σ_s and \vec{n}_s is the unitary and normal to Σ_s vector.

Propiedades de los *edge elements*

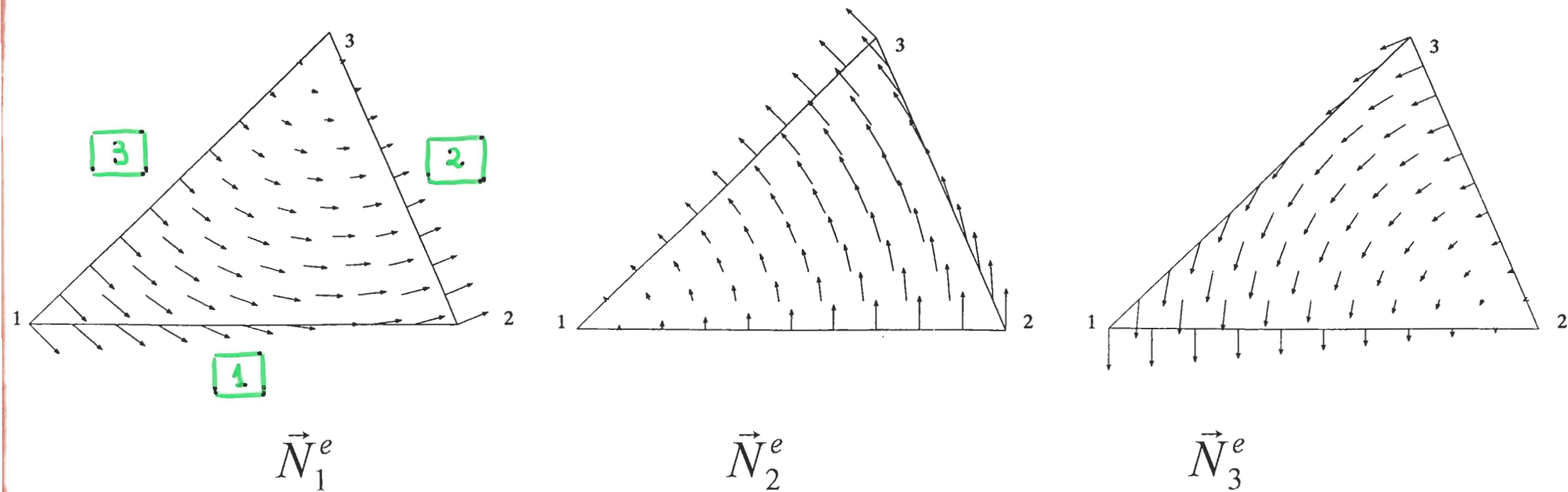
Grados de libertad:

componentes tangenciales del campo en las aristas

Propiedades más relevantes:

- Divergencia nula: $\nabla \cdot \vec{N}_i^e = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0$ (elimina soluciones *espúreas*)
- Rotacional constante en cada elemento: $\nabla \times \vec{N}_i^e = cte$
- Componente tangencial del campo interpolado continua en las caras, aun siendo discontinua la componente normal \Rightarrow adecuados para imponer condiciones de contorno en conductores y aproximar el campo en la entrecara de materiales con diferentes constantes dieléctricas

Edge elements en 2-D



Interpolación del campo eléctrico

Campo eléctrico interpolado en el elemento Ω_e

$$\vec{E}_h^e = \sum_{i=1}^6 E_i^e \vec{N}_i^e = \{E^e\}^T \{\vec{N}^e\} = \{\vec{N}^e\}^T \{E^e\}$$

donde E_i^e son las componentes tangenciales de \vec{E}_h^e sobre las aristas del tetraedro,

$$\{E^e\}^T = (E_1^e, E_2^e, \dots, E_6^e) \text{ y } \{\vec{N}^e\}^T = (\vec{N}_1^e, \vec{N}_2^e, \dots, \vec{N}_6^e)$$

Componente tangencial del campo interpolado sobre Σ_s

$$\vec{n}_s \times \vec{E}_h^s = \sum_{i=1}^3 E_i^s \vec{S}_i^s = \{E^s\}^T \{\vec{S}^s\} = \{\vec{S}^s\}^T \{E^s\}$$

Cálculo de los parámetros S

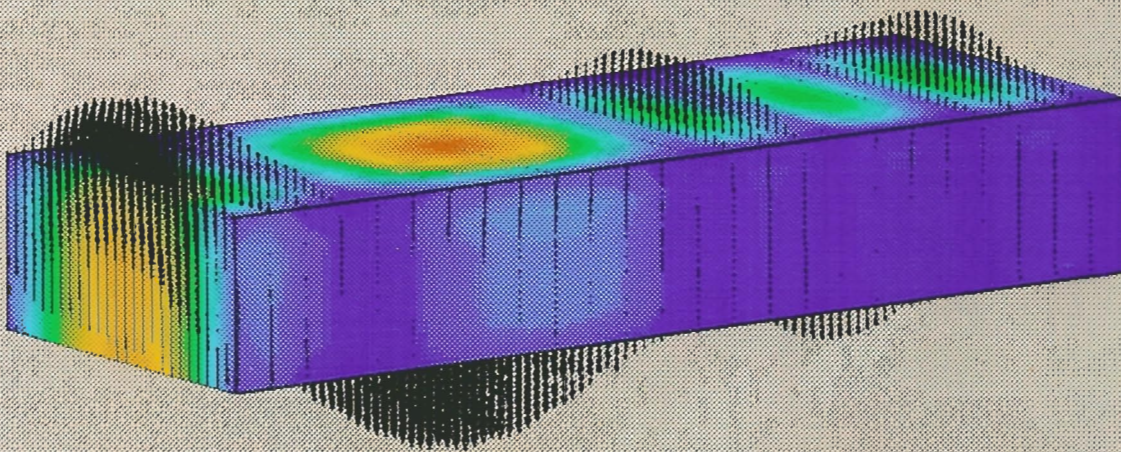
Cálculo de los parámetros S_{i1} a partir del campo interpolado mediante elementos finitos, \vec{E}_i , en cada puerta

$$S_{11} = \frac{1}{Z_{w1}^*} \iint_{P_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{e}_{t_1}^* dS - 1$$

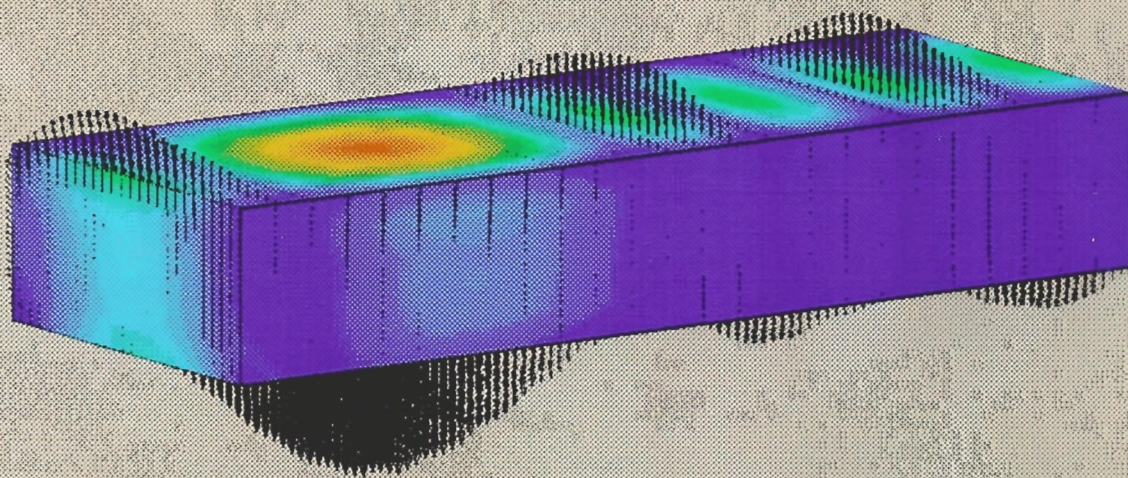
$$S_{i1} = \frac{1}{Z_{w_i}^*} \iint_{P_i} \vec{E}_i \cdot \vec{e}_{t_i}^* dS \quad i \neq 1$$

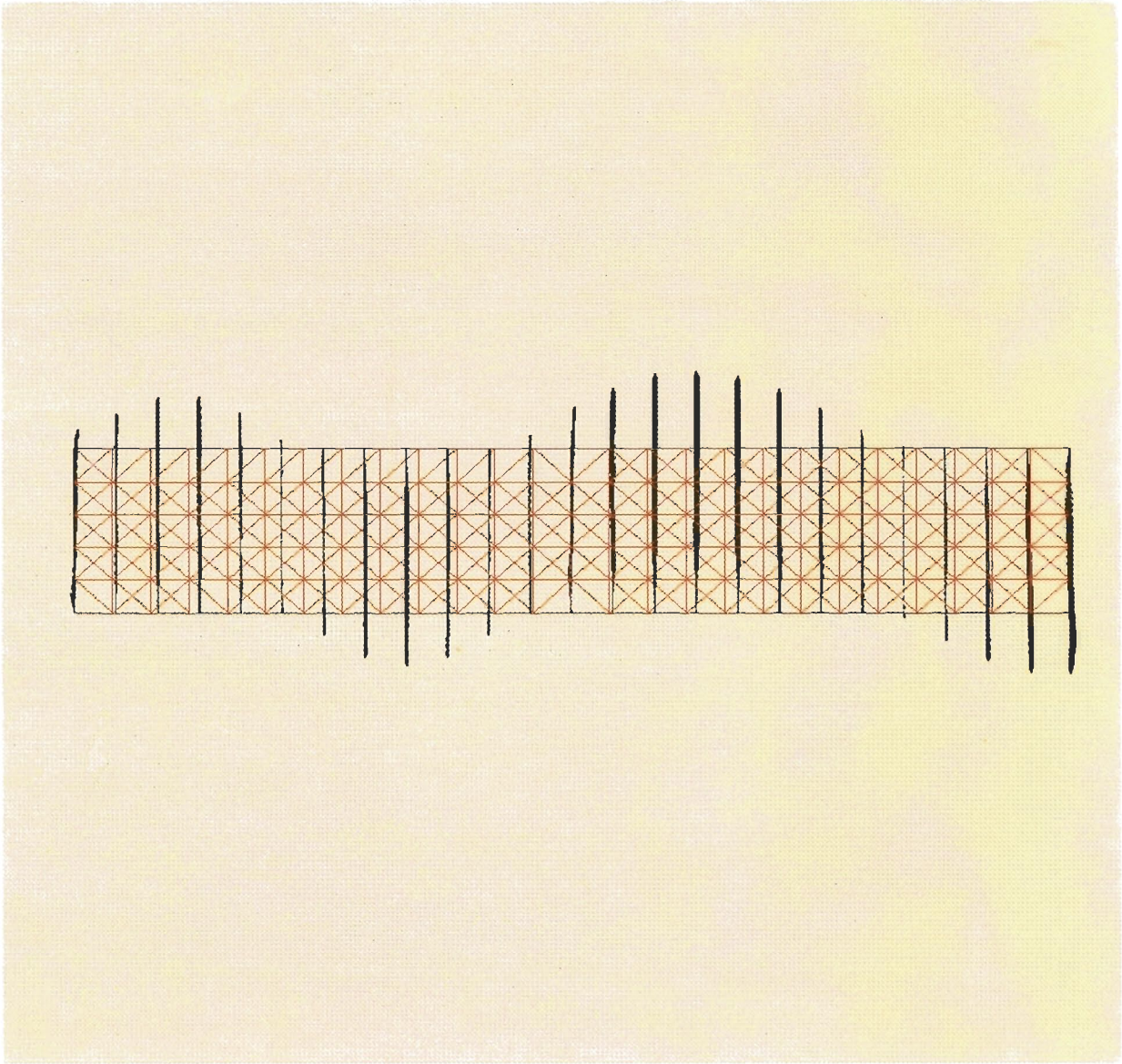
- ⇒ Los parámetros S se obtienen como un **promedio del campo sobre toda la puerta.**
(Resultados más exactos que los obtenidos a través de expresiones en las que sólo se consideren valores puntuales)

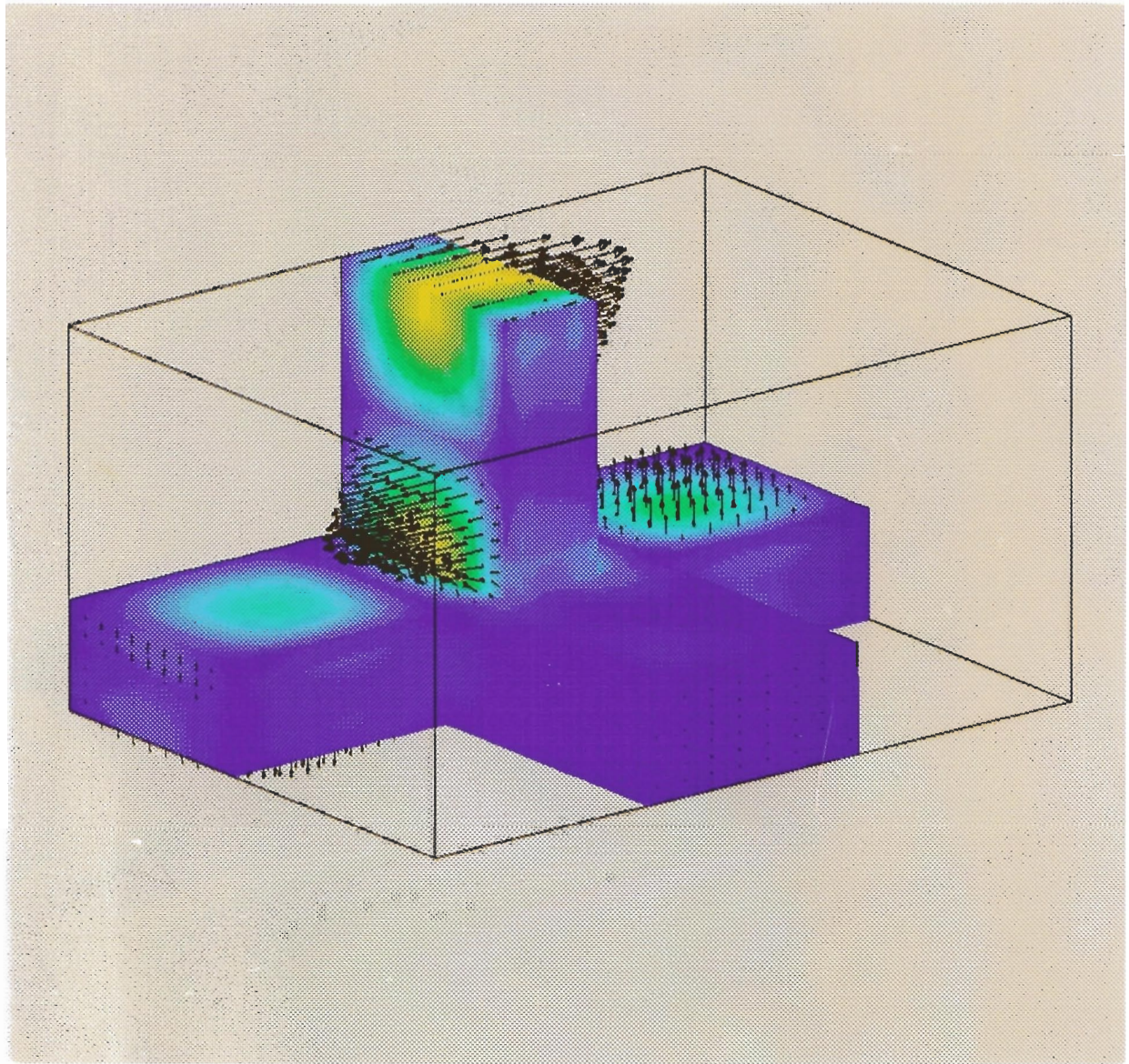
Cambio de dielectrico en una guia: $\text{Re}(E)$

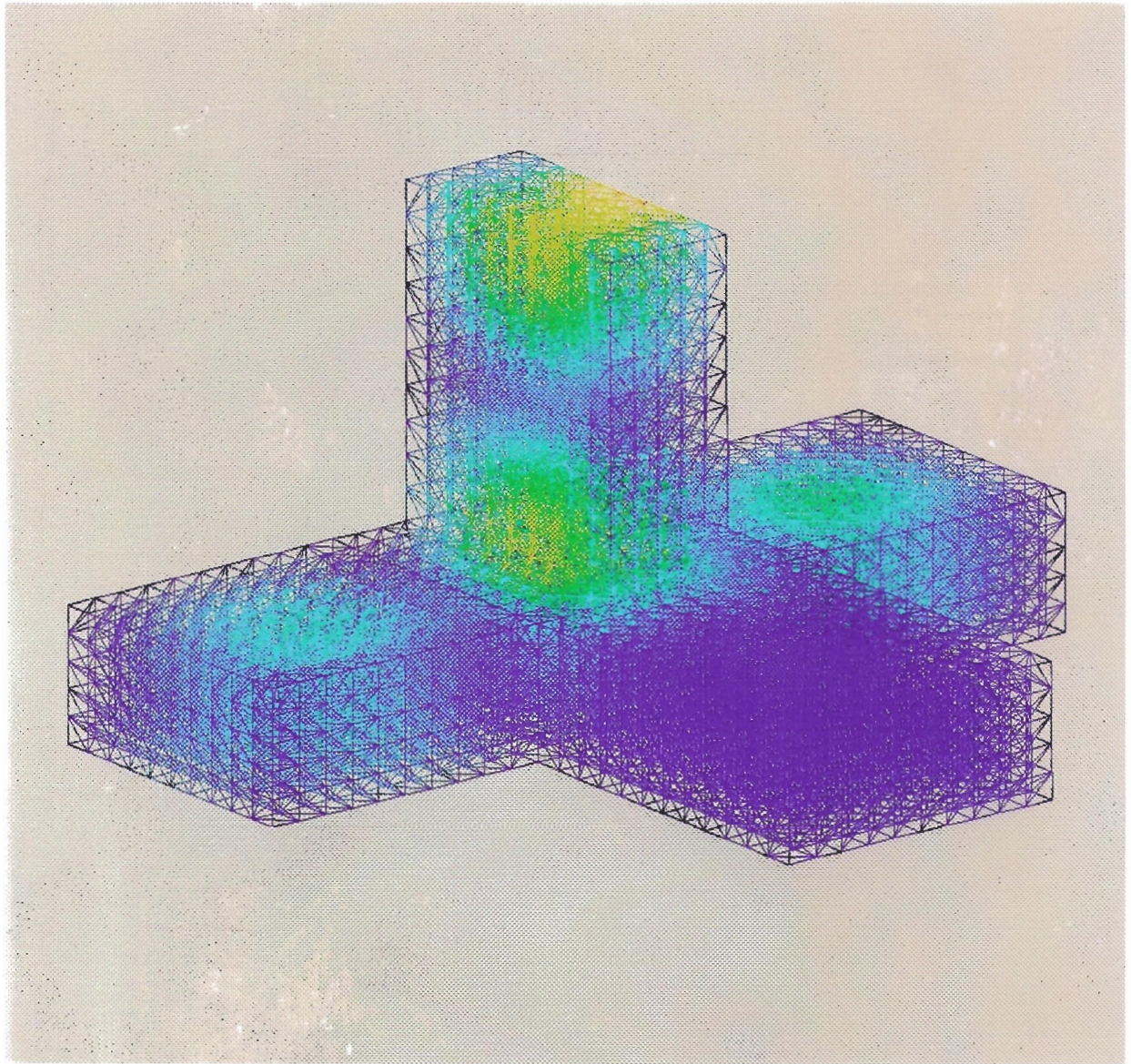


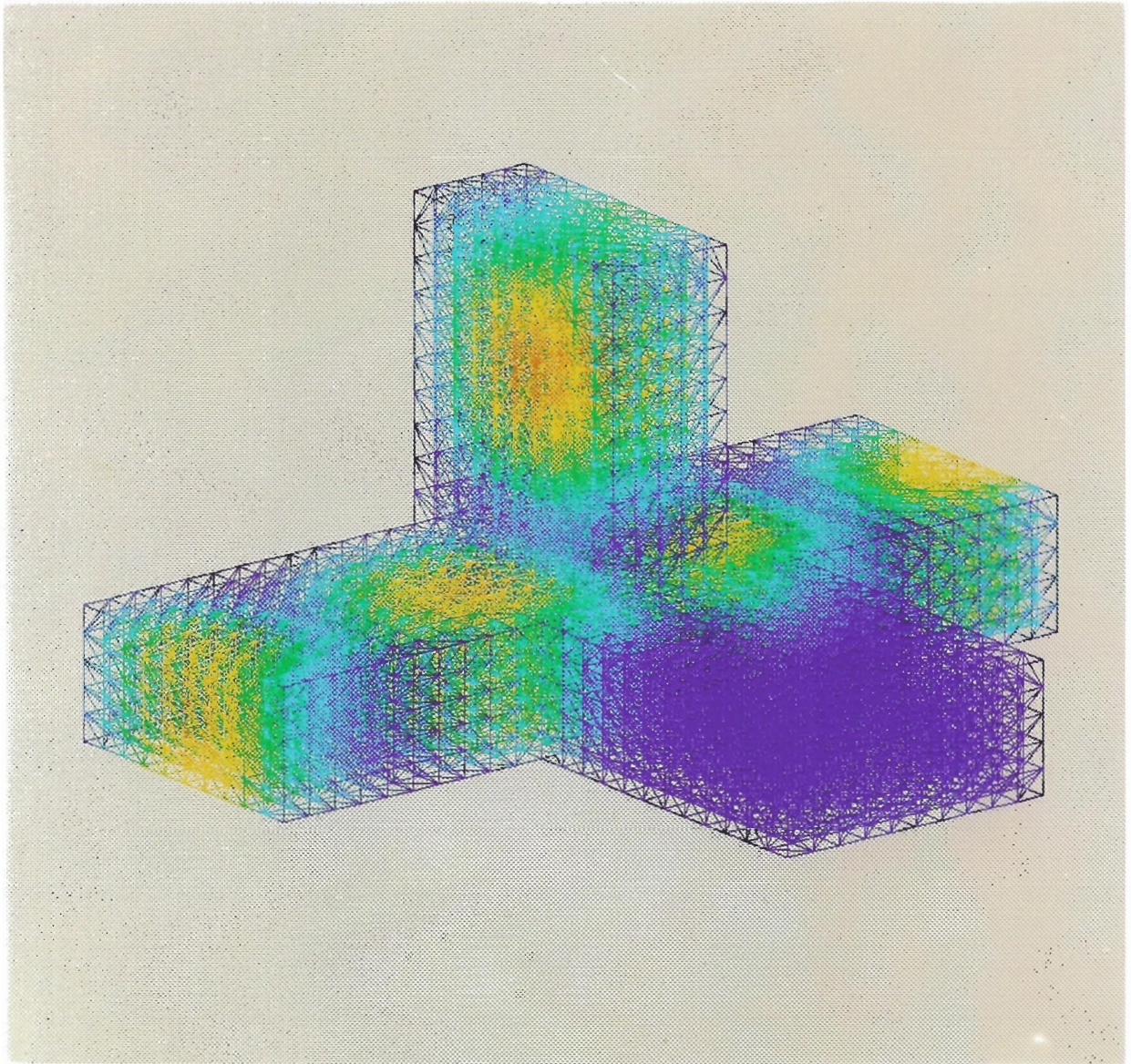
Cambio de dielectrico en una guia: $\text{Im}(E)$





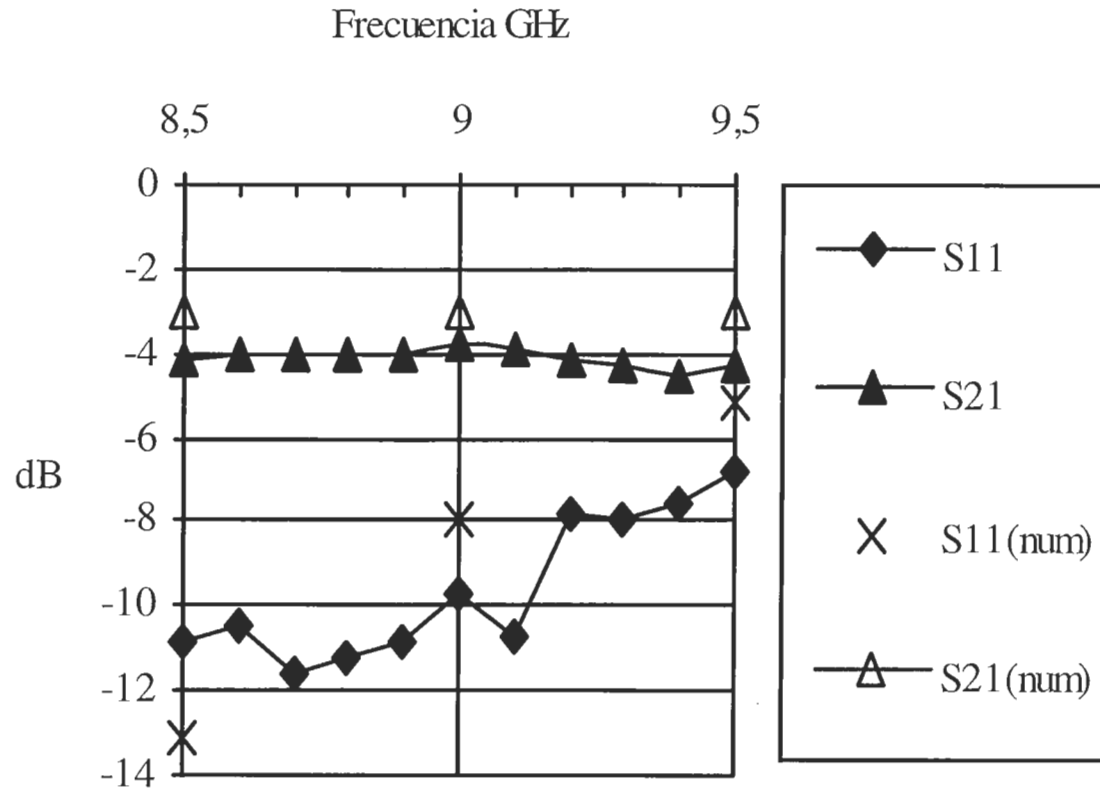




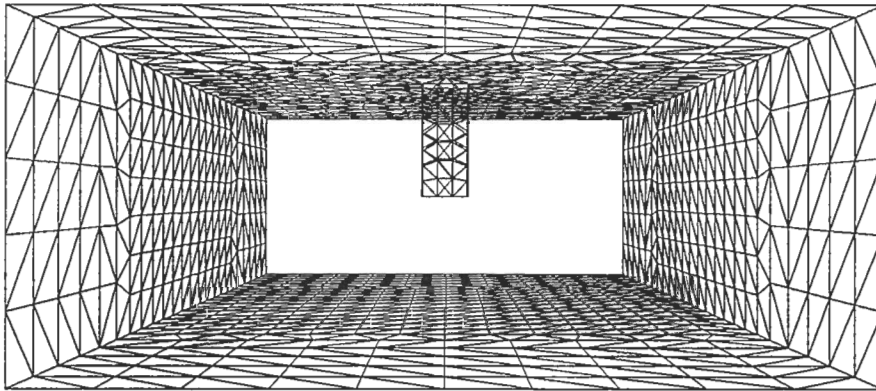


Parámetros S en una T-híbrida

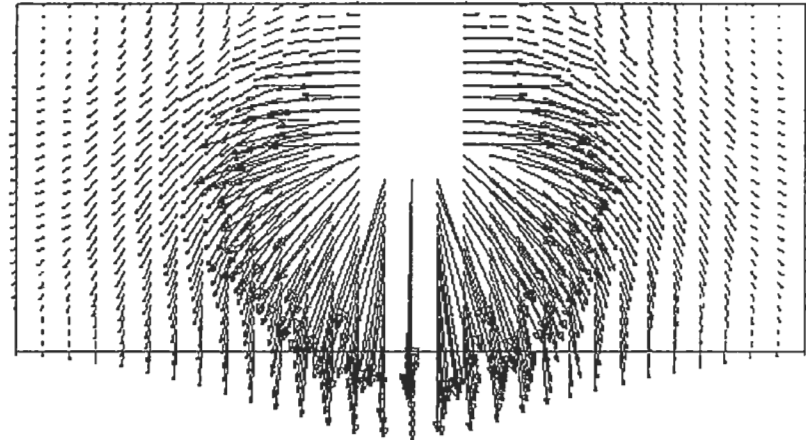
Comparación entre resultados numéricos y experimentales



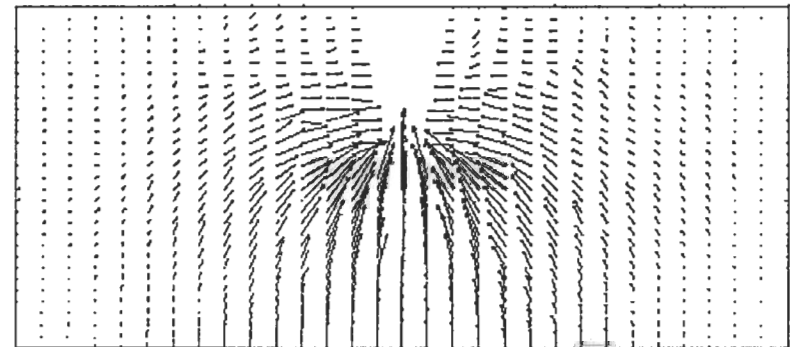
Wave Guide with a Conductive Post



Inner view of surface triangulation



$\text{Re}(\mathbf{E})$



$\text{Im}(\mathbf{E})$

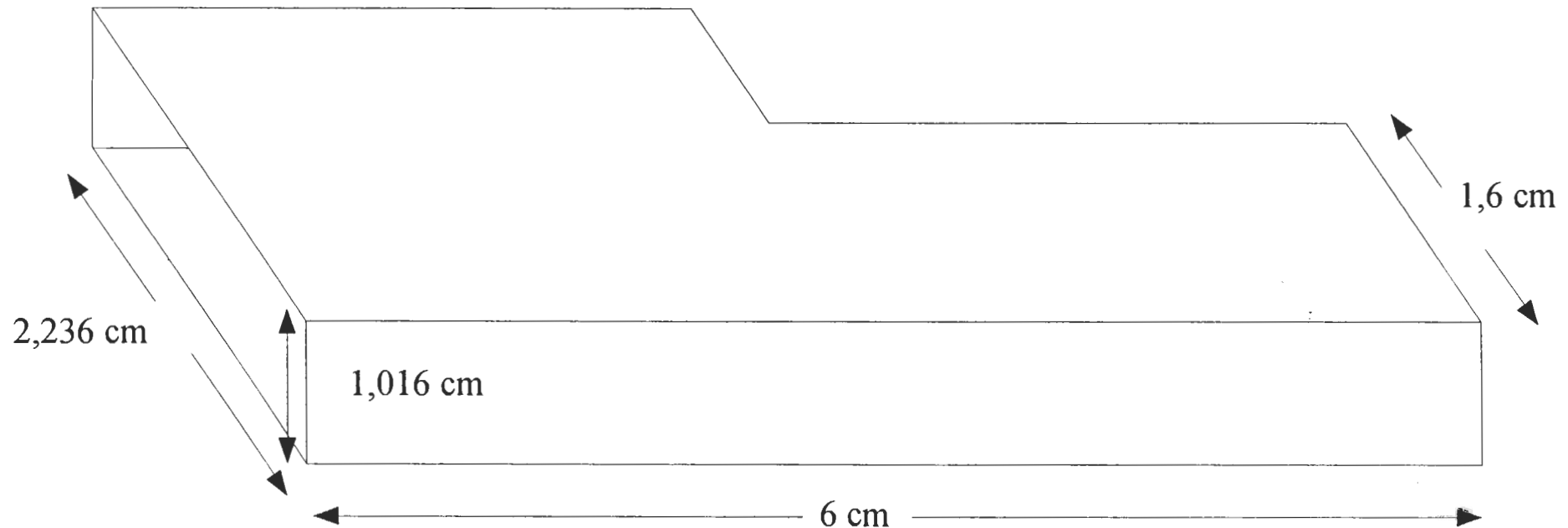
Estrechamiento en una guía rectangular

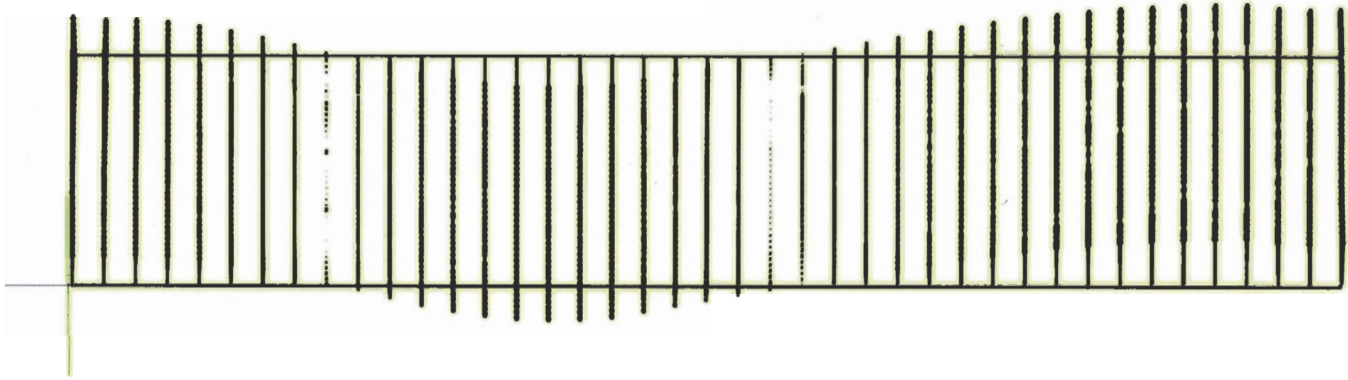
Datos:

Frecuencia de trabajo: 10 GHz.

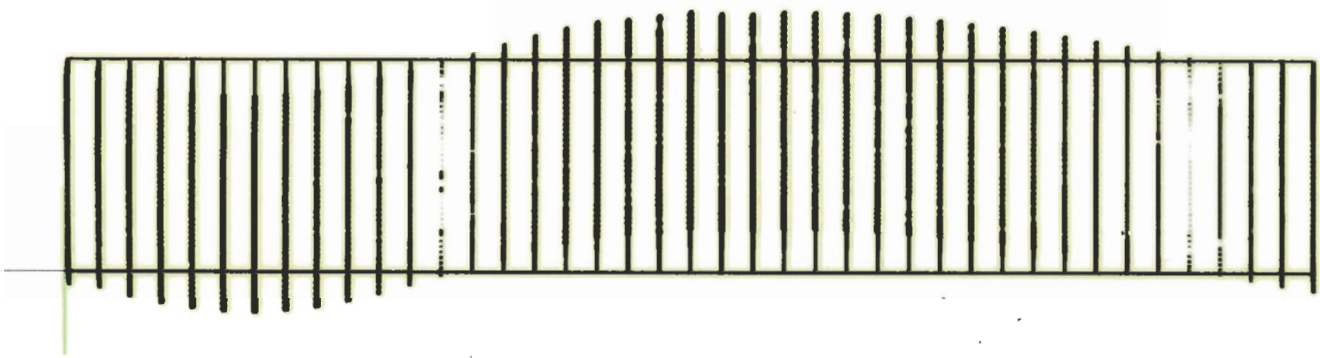
Módulo del coeficiente de reflexión (analítico): 0,43

Módulo del coeficiente de reflexión (numérico): 0,47

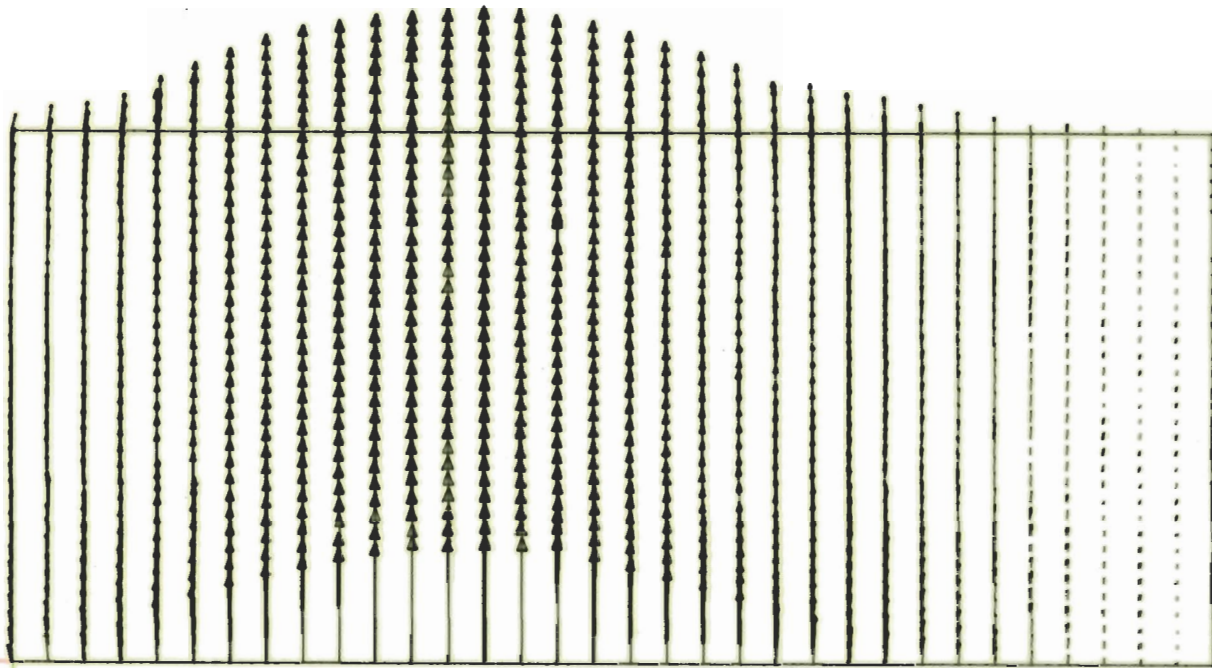




Corte longitudinal: Parte Real del campo

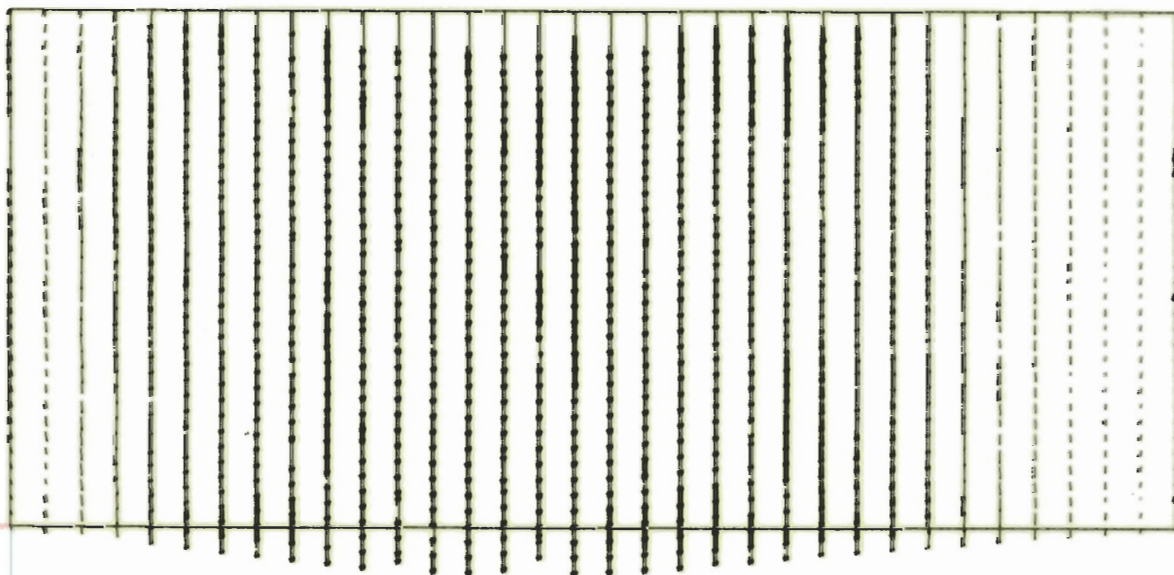


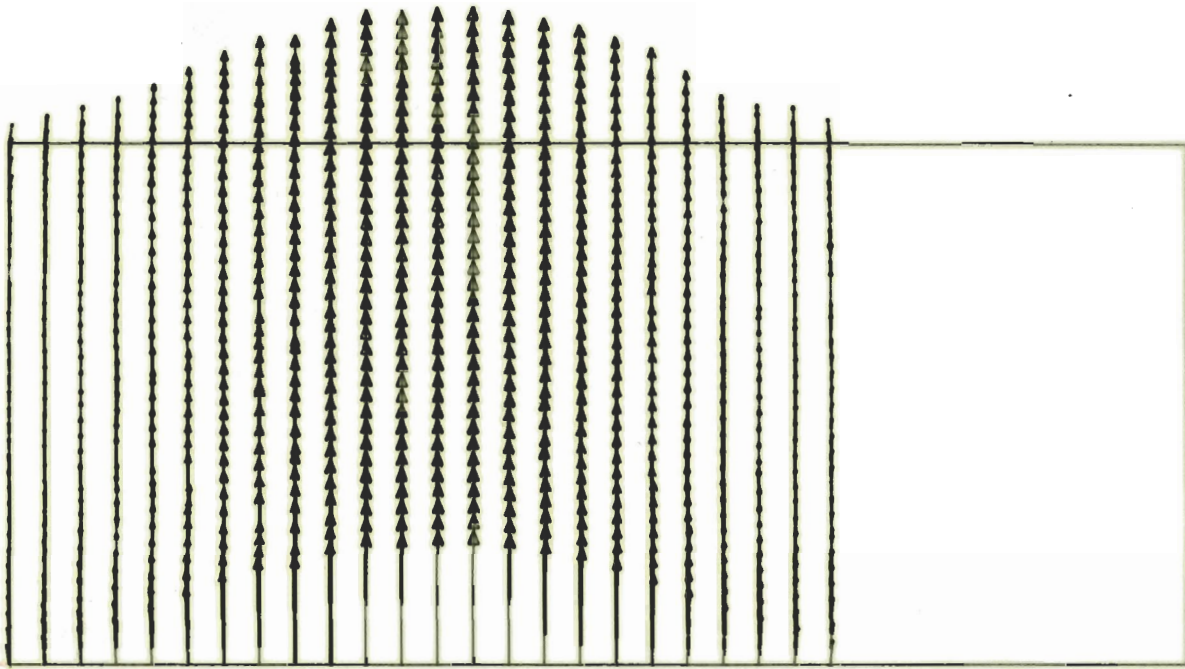
Corte longitudinal: Parte Imaginaria del campo



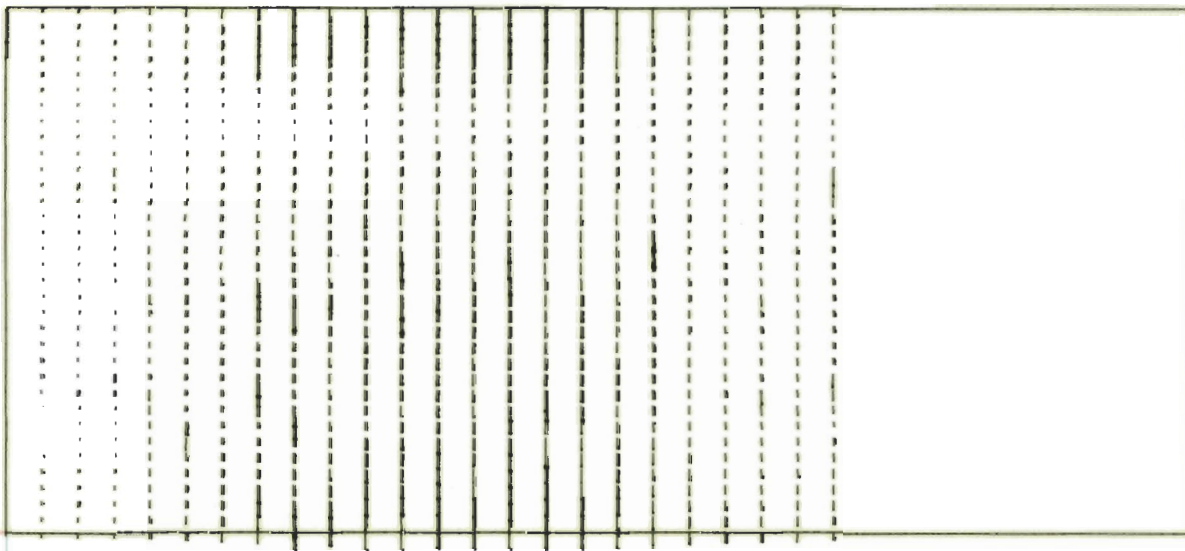
Parte Imaginaria del campo en la guía ancha

Parte Real del campo en la guía ancha

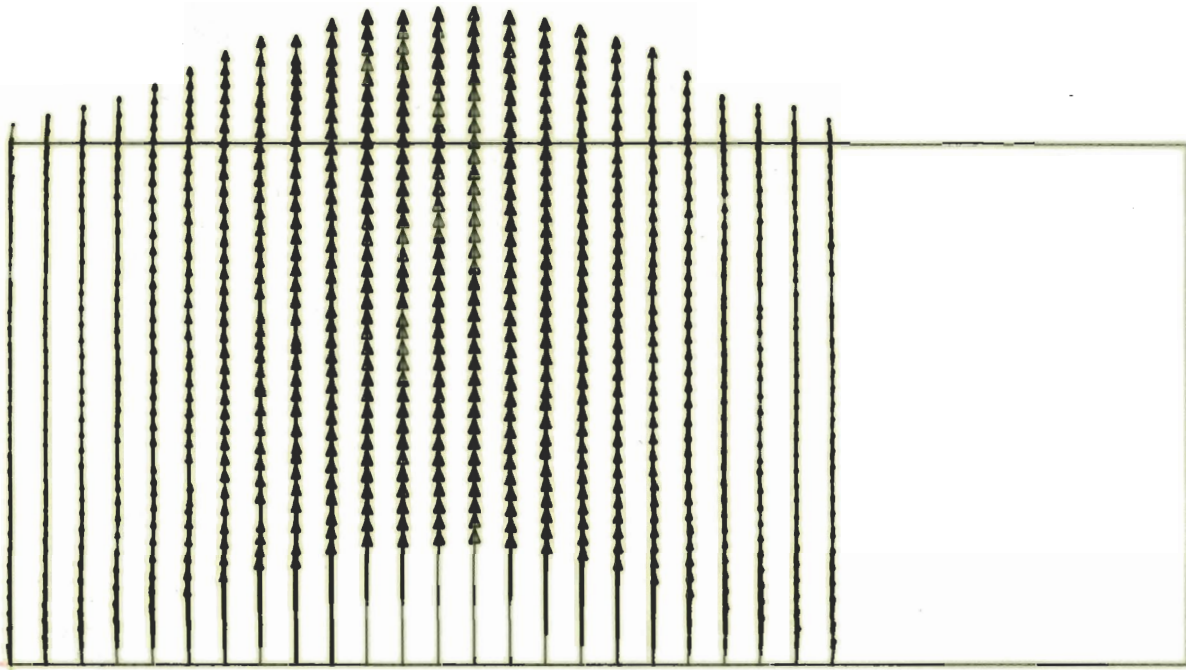




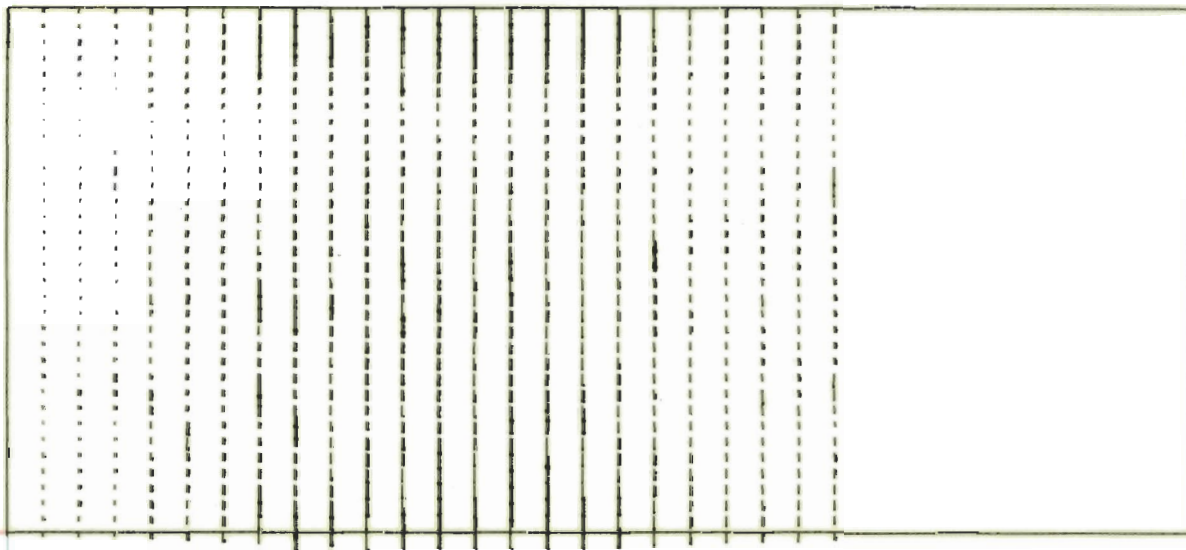
Parte Imaginaria del campo en la guía estrecha



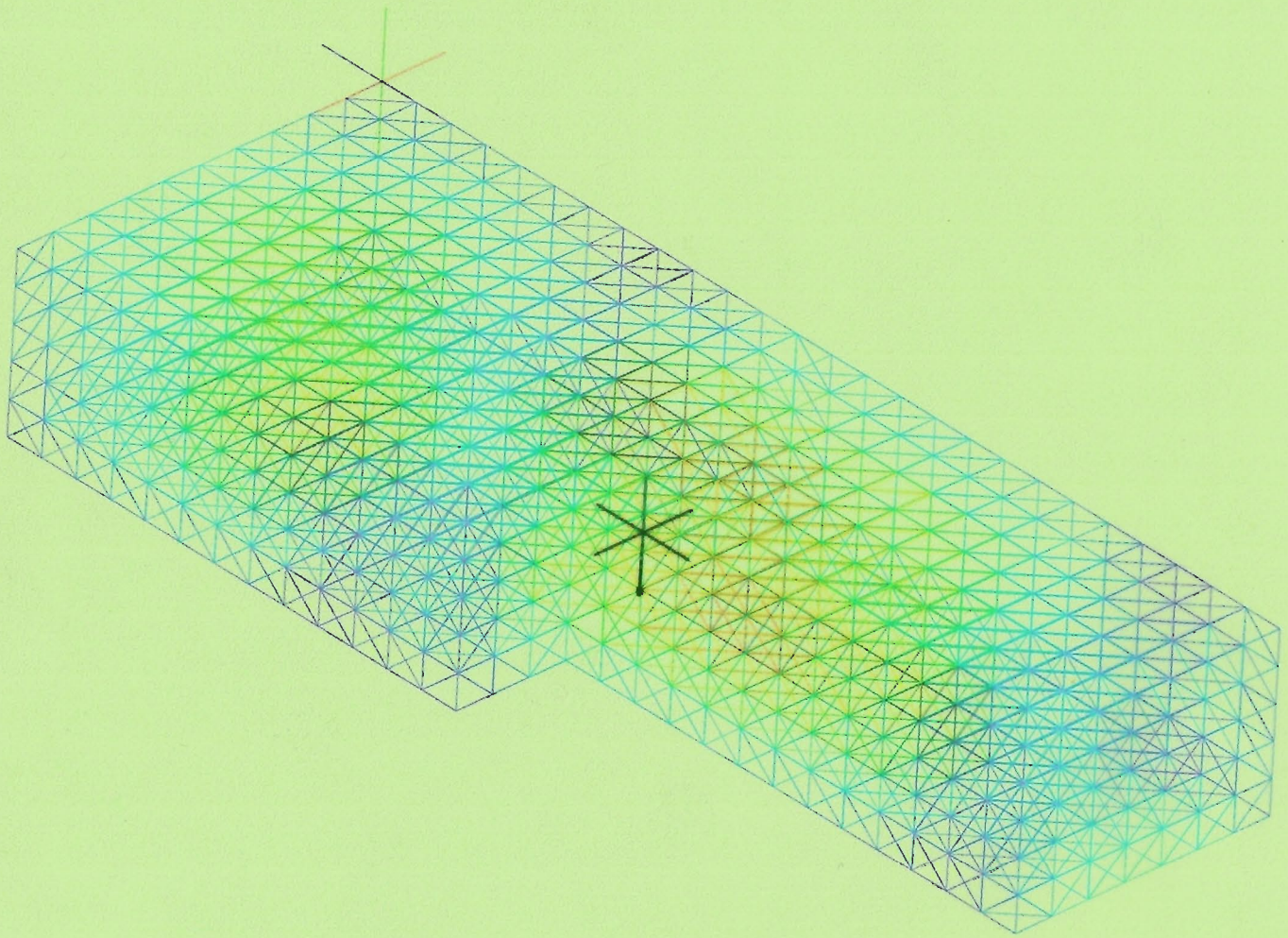
Parte Real del campo en la guía estrecha



Parte Imaginaria del campo en la guía estrecha



Parte Real del campo en la guía estrecha



INTRODUCCIÓN

OBJETIVO:

– Cavity 3D:

- Paredes perfectamente conductoras
- Medio isótropo y parcialmente homogéneo
- Medio no conductor
- No existen fuentes



Frecuencias de resonancia

Modos de resonancia



MEF

PLANTEAMIENTO

Ecuación diferencial

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = 0$$

k_0^2 : autovalor
 \mathbf{E} : autofunción

Condición de contorno sobre la pared conductora

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{r} \in \partial \Omega$$

Problema variacional correspondiente

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) d\Omega = k_0^2 \int_{\Omega} \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} d\Omega$$

$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ sobre $\partial \Omega$, para toda función prueba \mathbf{F} suficientemente regular
tal que $\mathbf{n} \times \mathbf{F} = 0$ sobre $\partial \Omega$

Discretización

$$\mathbf{E}^e = \sum_{i=1}^6 E_i^e \mathbf{N}_i^e = \{E^e\}^T \{N^e\}$$

PLANTEAMIENTO

$$\sum_{e=1}^E \{E^e\} [k^e] \{F^e\} = k_0^2 \sum_{e=1}^E \{E^e\} [m^e] \{F^e\}$$

Matrices elementales

$$[k^e] = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \{N^e\}) \cdot (\nabla \times \{N^e\}^T) d\Omega$$

$$[m^e] = \int_{\Omega} \epsilon_r \{N^e\} \cdot \{N^e\}^T d\Omega$$

Ensamblaje

Matrices elementales



Matrices globales

$$[k^e]$$



$$[K]$$

$$[m^e]$$

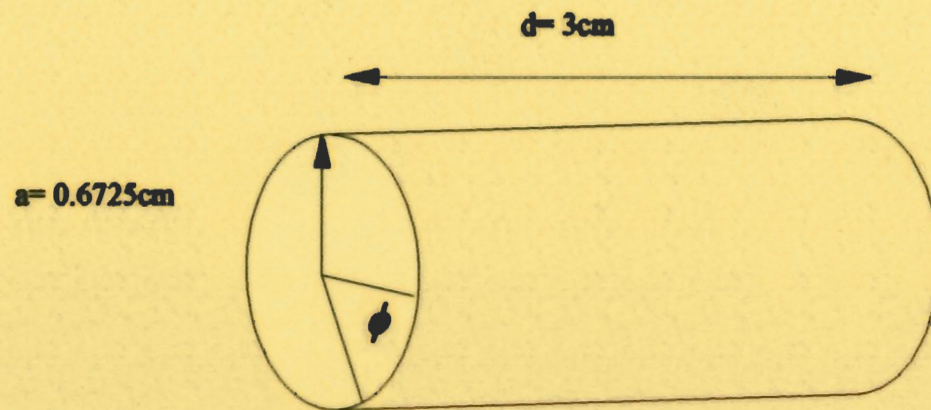


$$[M]$$

Problema de autovalores generalizado

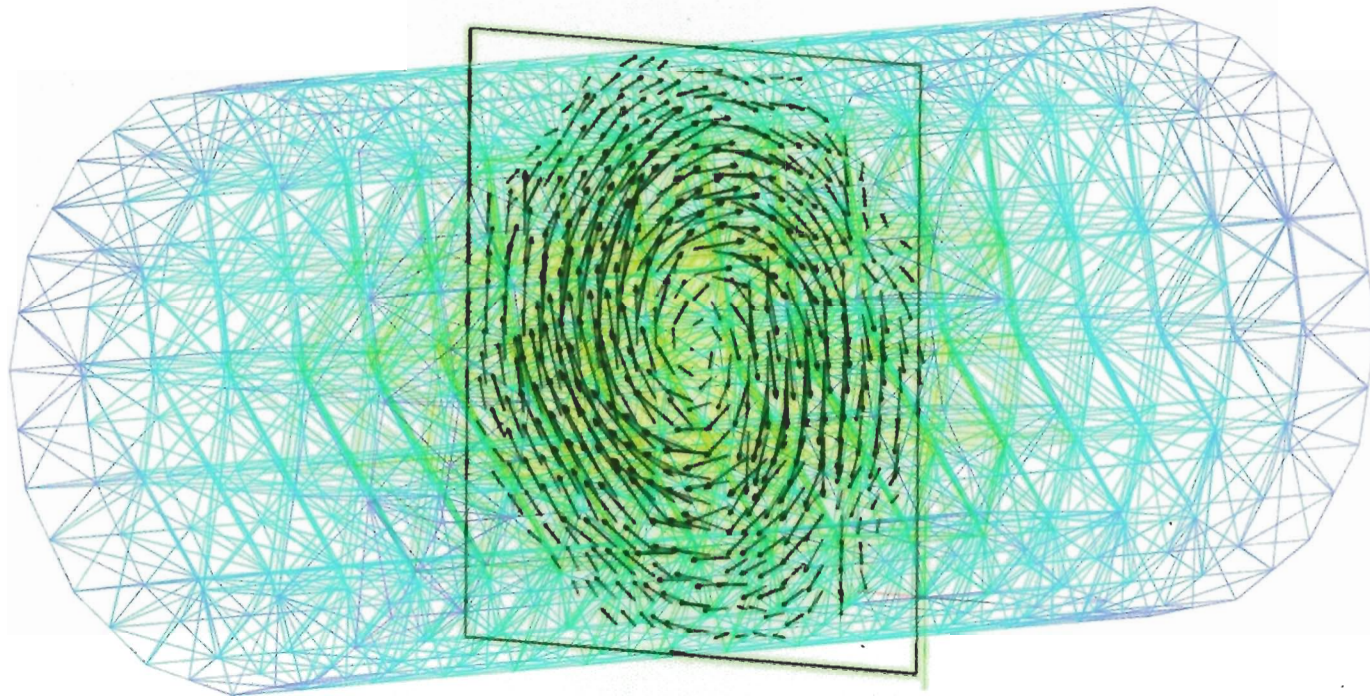
$$[K] \{E\} = k_0^2 [M] \{E\}$$

Cavidad cilíndrica



Geometría de la cavidad

CAVIDAD CILINDRICA TE011



CAVIDAD CILINDRICA TE011



Cavidad cilíndrica

modos	fr. Cal.	fr. Obt.
TE_{111}	2.9312	2.9415
TE_{112}	3.447	3.48804
TM_{010}	3.576	3.56165
TM_{011}	3.726	*
TM_{012}	4.1442	4.17400
TE_{113}	4.1671	4.17500
TE_{211}	4.6606	4.73567
TM_{013}	4.76	4.74327
TE_{212}	5.0012	*
TE_{114}	5.004	5.00108
TM_{014}	5.5076	5.48615
TE_{213}	5.522	*
TE_{011}	5.7932	5.79968
TE_{115}	59085	*
TE_{012}	6.0705	*

SIMULACIÓN DE CAMPOS DE VIENTOS

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio acotado de frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,

\bar{u}_0 : campo de viento obtenido mediante interpolación de datos experimentales.

□ Objetivo: encontrar un campo de velocidades \vec{u} que se ajuste a \bar{u}_0 , verificando,

□ Condición de incompresibilidad: $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ en Ω

□ Condición de impermeabilidad: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ en Γ_1

□ Entonces, el campo \vec{u} es la solución del problema: "Hallar $\vec{u} \in K$ que verifique,

$$\left\{ \begin{array}{l} J(\vec{u}) = \min_{\vec{v} \in K} J(\vec{v}) \\ K = \{ \vec{v}; \operatorname{div} \vec{v} = 0, \vec{v} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1} = 0 \} \end{array} \right. \quad \text{donde} \quad J(\vec{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\vec{v} - \bar{u}_0)^t P (\vec{v} - \bar{u}_0)$$

□ Este problema puede ser formulado introduciendo un multiplicador de Lagrange.

$$L(\vec{v}, q) = J(\vec{v}) + \int_{\Omega} q \operatorname{div} \vec{v}$$

$$H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_{\Gamma_2} = 0 \right\} \quad H(\operatorname{div}, \Omega) = \left\{ \vec{v} \in (L^2(\Omega))^d; \operatorname{div} \vec{v} \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$H_{0,\Gamma_1}(\operatorname{div}, \Omega) = \left\{ \vec{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega); \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} \varphi = 0, \forall \varphi \in H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega) \right\}$$

□ Buscamos el punto silla del lagrangiano: (\vec{u}, λ) en $H_{0,\Gamma_1}(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que,

$$L(\vec{u}, q) \leq L(\vec{u}, \lambda) \leq L(\vec{v}, \lambda) \quad \forall q \in L^2(\Omega) \text{ y } \forall \vec{v} \in H_{0,\Gamma_1}(\operatorname{div}, \Omega)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} L(\vec{u}, \lambda) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial q} L(\vec{u}, \lambda) = 0$$

$$\int_{\Omega} \vec{v}^t P \vec{u} + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} \vec{v} = \int_{\Omega} \vec{v}^t P \vec{u}_0 \quad \forall \vec{v} \in H_{0,\Gamma_1}(\operatorname{div}, \Omega)$$

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega)$$

□ Si además consideramos que $\lambda \in H^1(\Omega)$, se obtiene la siguiente formulación:

$$-\vec{\nabla} \cdot (P^{-1} \vec{\nabla} \lambda) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 \quad \text{en } \Omega$$

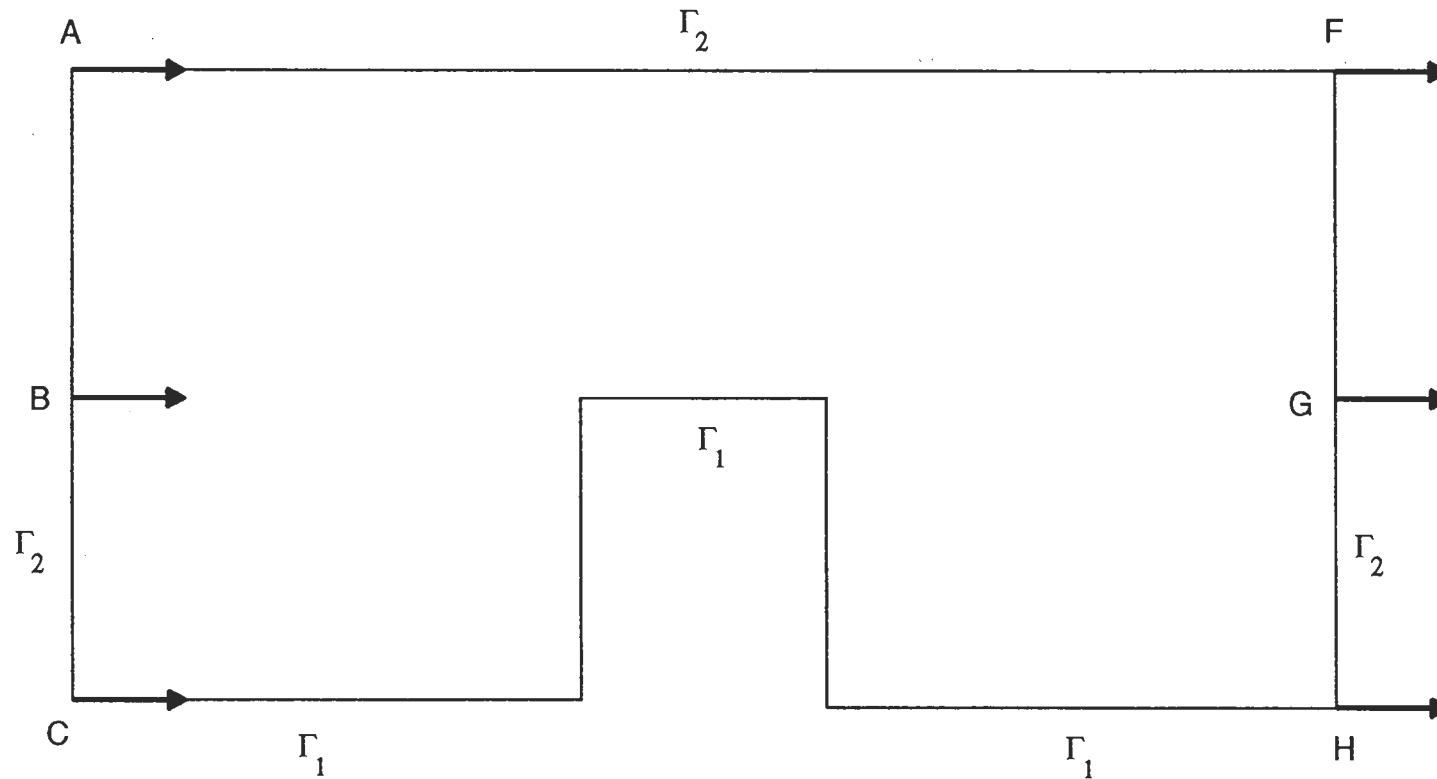
$$-P^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{u}_0 \quad \text{en } \Gamma_1$$

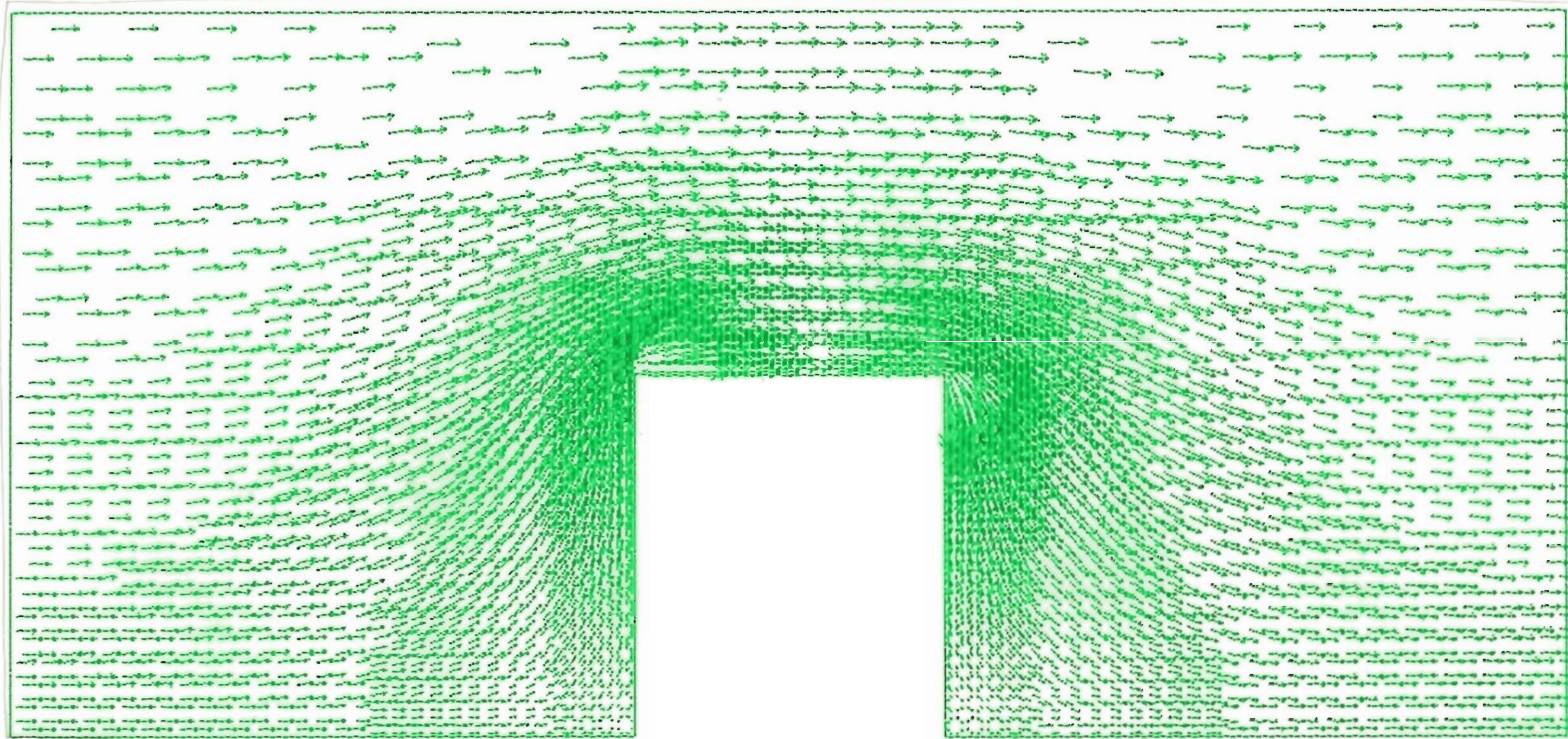
$$\lambda = 0 \quad \text{en } \Gamma_2$$

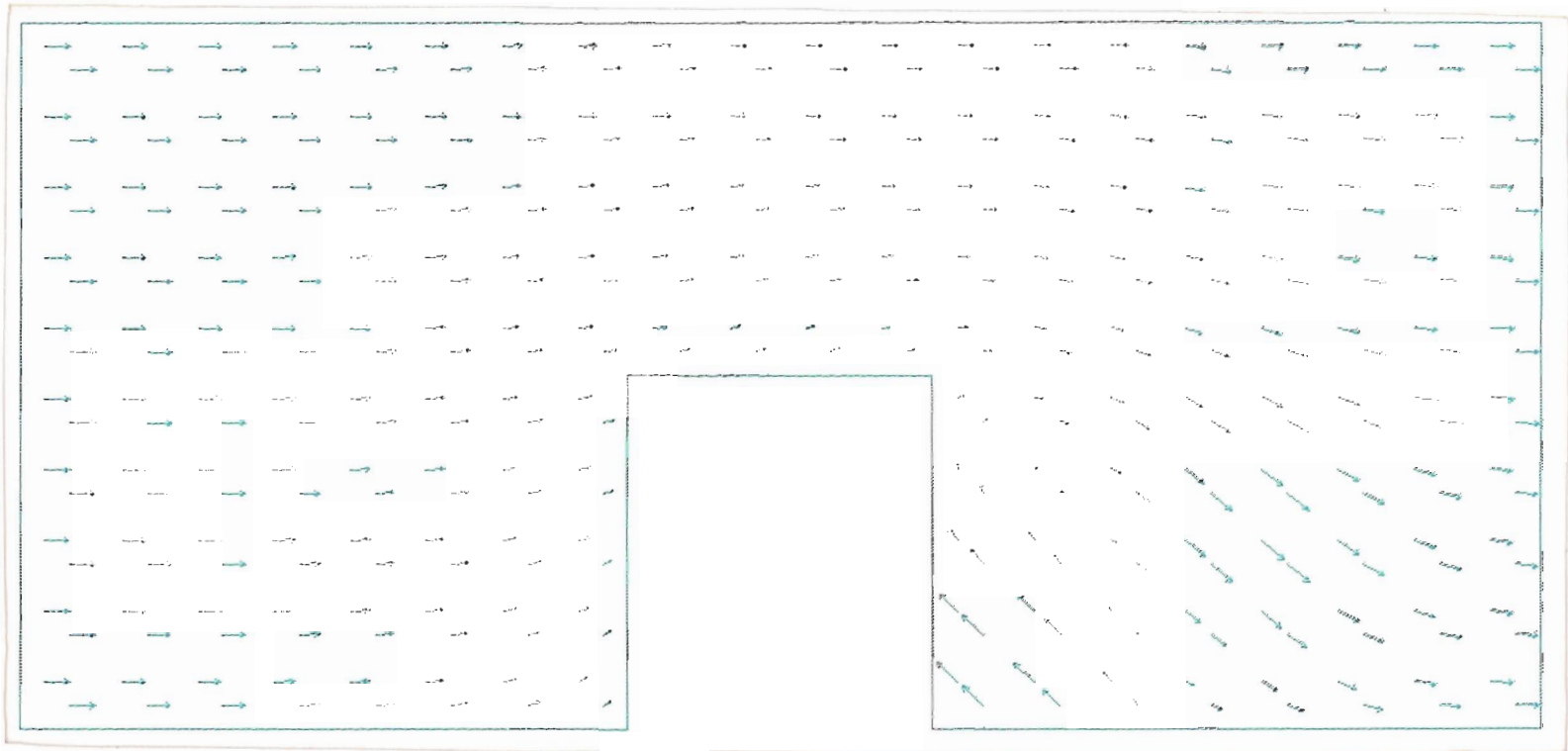
donde

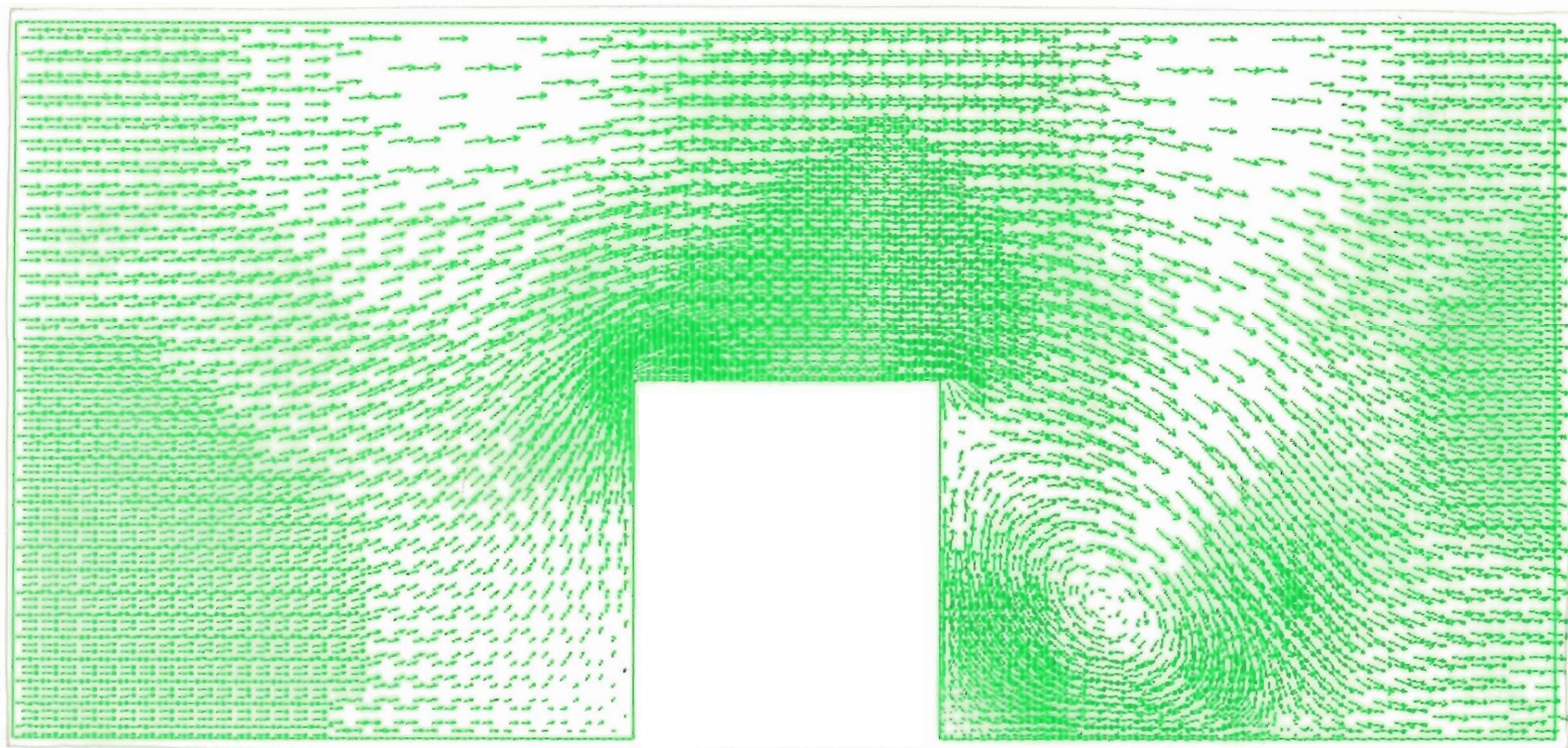
$$\vec{u} = \vec{u}_0 + P^{-1} \vec{\nabla} \lambda \quad \text{en } \Omega$$

Un Problema Modelo en 2-D









Un Problema Modelo en 2-D

